Estimation - Méthode Des Moments

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2024-2025

Objectif

On suppose qu'on a K paramètres $\theta = (\theta_1, ..., \theta_K)$ *(ex : moyenne, variance...)* de la loi de proba de X
On suppose qu'il existe K fonctions μ_i tq $\forall i \in [\![1, K]\!], \mu_i(\theta) = \mathbb{E}[X^i] = g_i(\theta_1, ..., \theta_K)$

On cherche alors $\left(\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_K\right)$ tq $\forall i \in [\![1, K]\!], \widehat{\mu}_i = \overline{x^i} = g_i(\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_K)$

On utilise $\widehat{\mu}_i = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n^i$ pour estimer μ_i (avec N grand)

Restrictions

Les g_i doivent être bijectives (ou au moins injectives)
Les estimateurs sont convergents (ils peuvent être biaisés)
Pour des estimateurs non biaisés, on peut utiliser la maximisation de la vraisemblance

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on cherche alors $\theta_1 = \mu$ et $\theta_2 = \sigma^2$.

On sait que $\begin{cases} \overline{x} = \widehat{\theta}_1 \\ \overline{x^2} = \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_1^2 \end{cases}$, donc $\widehat{\theta}_2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sigma_N^2$

D'un autre côté, $\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \mu \\ \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 = \theta_2 + \theta_1^2 \end{cases}$,

Donc on a : $\begin{cases} \widehat{\Theta}_1 = S_N^2 : \text{ Estimateur biaisé de la variance (mais cv en proba)} \\ \widehat{\Theta}_2 = \overline{X_N} : \text{ Estimateur non biaisé de la moyenne (cv + atteint la borne de Cramer-Rao)} \end{cases}$